Przestrzenie Sobolewa – wprowadzenie

Definicja.

$$W^{m,p} = \Big\{ f \ : \ \partial^\alpha f \in L^p \text{ dla wszystkich } |\alpha| \leqslant m \Big\}$$

Zadanie 1. Sprawdzić, że $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ zadaje snop:

- Jeśli $u \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(U)$ oraz $V \subseteq U$, to $u|_V \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(V)$; ponadto słaby gradient na V jest obcięciem słabego gradientu na U.
- Jeśli $u \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(U)$ oraz $u \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(V)$, to $u \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(U \cup V)$.

Zadanie 2. Załóżmy, że obszar Ω daje się podzielić na dwa podobszary Ω_1, Ω_2 przedzielone podrozmaitością $\overline{\Omega_1} \cap \overline{\Omega_2}$ klasy C^1. Jeśli funkcja $u \in C(\Omega)$ spełnia $u \in C^1(\overline{\Omega_1})$ i $u \in C^1(\overline{\Omega_2})$, to u jest słabo różniczkowalna, w szczególności $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$.

Zadanie 3. Podać przykład funkcji, dla której $\nabla f \in L^2(\Omega)$, ale $f \notin L^2(\Omega)$.
Wskazówka (Nikodym). Za Ω przyjąć obszar złożony z dużego prostokąta C oraz prostokątów A_m (o wymiarach $\alpha_m \times \frac{1}{3}$) połączonych pionowo prostokątami B_m (o wymiarach $\beta_m \times \frac{1}{3}$) z C. Rozważyć funkcję

$$f = \begin{cases} \gamma_m & \text{na } A_m, \\ 0 & \text{na } C, \\ \text{liniowa interpolacja} & \text{na } B_m \end{cases}$$

z odpowiednim wyborem α_m, β_m, γ_m.

Zadanie 4. Podać przykład funkcji, dla której $f, D^2 f \in L^2(\Omega)$, ale $\nabla f \notin L^2(\Omega)$.
Wskazówka (Mazya). Tym razem wziąć A_m o wymiarach $2^{-m} \times 2^{-m/2}$ i B_m o wymiarach $2^{-4m} \times 2^{-m}$. Przyjmując, że B_m łączą się z C na prostej $y = 0$, przyjąć

$$f(x,y) = \begin{cases} 2^{m+1} y - 1 & \text{na } A_m, \\ 2^{2m} y^2 & \text{na } B_m, \\ 0 & \text{na } C. \end{cases}$$

Zadanie 5. Zamiast $W^{m,p}(\Omega)$ można rozważyć przestrzeń $H^{m,p}(\Omega)$ zdefiniowaną jako uzupełnienie $C^\infty(\Omega) \cap W^{m,p}(\Omega)$ w normie $W^{m,p}$. Wykazać, że w ogólności $H^{m,p}(\Omega) \subseteq W^{m,p}(\Omega)$. Scharakteryzować przestrzenie $W^{1,\infty}$ i $H^{1,\infty}$.

Zadanie 6. (twierdzenie Meyersa-Serrina) Wykazać, że dla $1 \leqslant p < \infty$ funkcje gładkie są gęste w $W^{1,p}(\Omega)$, a więc mamy $W^{m,p}(\Omega) = H^{m,p}(\Omega)$.
Wskazówka. Rozważyć obszary

$$\Omega_k = \left\{ x \in \Omega : |x| \leqslant k,\ \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \frac{1}{k} \right\},$$

rozkład jedynki λ_k wpisany w $\Omega_{k+1} \setminus \Omega_{k-1}$, odpowiednią funkcję wygładzającą φ_k, a następnie rozważyć przybliżenie $u \in W^{m,p}(\Omega)$ przez funkcję

$$v = \sum_k \varphi_k * (\lambda_k u).$$